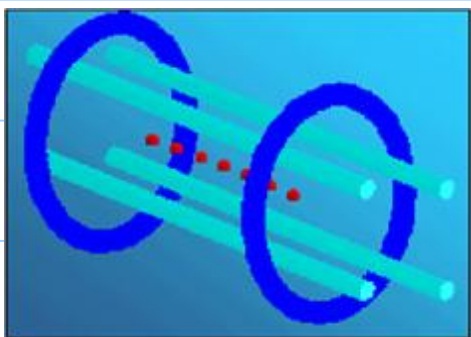


Positive Maps and Channels; part I

Note Title

6/17/2010

نظارت، مانع، کوانتومی



• ته حالت

• اندیشه گیری

• تحول بیاض ناگزیر

• تحول بیاض کنترل شده

• نوبه کوانتومی

• quantum operation

• quantum channel

$\mathcal{H}$ = Hilbert space

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ = فضای تمام عملگرهای کراندار بر $\mathcal{H}$

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$A: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

$$\|A\| < \infty$$

$$\rho \in B(\mathcal{H}) \xrightarrow{\mathcal{E}} \rho' \in B(\mathcal{H}')$$

$$\rho' := T(\rho)$$

• T is linear

• $\rho \geq 0 \longrightarrow T(\rho) \geq 0$

• $\text{tr}(T(\rho)) = \text{tr}(\rho)$

• $(T \otimes I)_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'} \geq 0 \quad \forall \mathcal{H}'$

Completely Positive. ↙

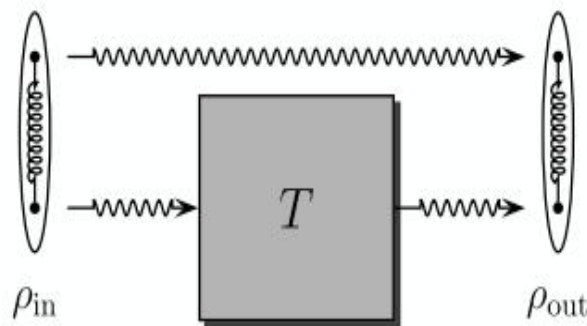


Figure 5.2. Channels can be applied to subsystems even if the overall system is in an entangled state.

$(T \otimes I)$ turns density matrices into density matrices.

Kraus decomposition $\rightarrow T(\rho) = \sum_j A_j \rho A_j^\dagger$

$\sum_j A_j^\dagger A_j = I$ Trace-preserving ; $\text{Tr}(T(\rho)) = \text{tr}(\rho)$

$\sum_j A_j A_j^\dagger = I$ Unital ; $T(I) = I$

Schrodinger Representation: $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\mathcal{T}} \rho' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$

Heisenberg Representation: $\langle X \rangle := \text{tr}_{\mathcal{H}}(X \rho)$

$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xleftarrow{\mathcal{T}^*} X' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$

$$\text{tr}(\mathcal{J}^*(x')\rho) = \text{tr}(\mathcal{J}(\rho)x')$$

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathcal{J}^*(x')\rho) &= \text{tr}\left(\sum_{\mu} A_{\mu} \rho A_{\mu}^{\dagger} x'\right) \\ &= \text{tr}\left(\rho \sum_{\mu} A_{\mu}^{\dagger} x' A_{\mu}\right)\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}^*(x') = \sum_{\mu} A_{\mu}^{\dagger} x' A_{\mu}$$

$$\mathcal{J}(\rho) = \sum_{\mu} A_{\mu} \rho A_{\mu}^{\dagger}$$

$T, T^* \geq 0$ and Hermitian.

T unital $\longleftrightarrow T^*$ trace-preserving

T trace-preserving $\longleftrightarrow T^*$ unital

• $\mathcal{E}, F \longrightarrow \mathcal{E} \circ F$

• $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = \lambda \mathcal{E}_1(\rho) + (1-\lambda) \mathcal{E}_2(\rho)$

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_r A_r \rho A_r^\dagger$$

• عملیات کوانتومی نیستند:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_v B_v \rho B_v^\dagger$$

$$B_v = \sum_r U_{vr} A_r$$

$U = \text{Unitary}$

• $N \leq d^2$

$\leftarrow \dim(\mathcal{H}) = 2$

• تعداد عملیات کوانتومی

$$\mathcal{T}(\rho) := U \rho U^\dagger$$

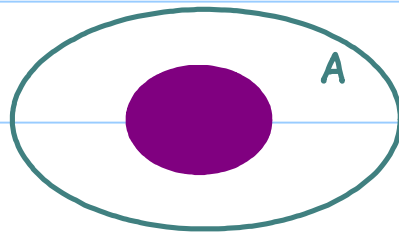
• تحول یکانی :

$$\mathcal{T}(\rho) := \rho \otimes \sigma$$

• گسترش :

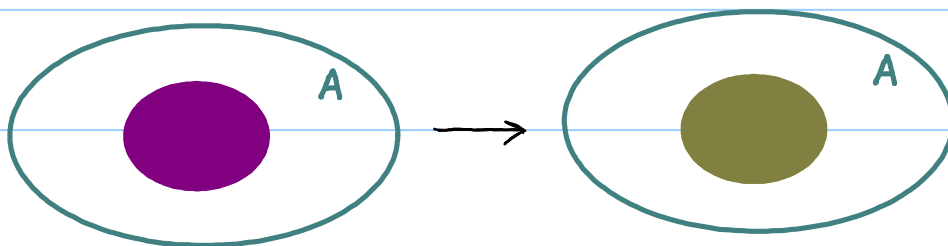
$$\mathcal{T}(\rho) = \text{tr}_B(\rho)$$

• رد بخشی :



$$\mathcal{T}(\rho) = \text{Tr}_E(U(\rho \otimes \sigma_E)U^\dagger)$$

• نونه محلی :



- Bit-flip channel

مثال ٤:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + pX\rho X$$

- phase flip channel

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \int d\theta e^{-\lambda \frac{\theta^2}{2}} e^{i\theta Z} \rho e^{-i\theta Z}$$

- Depolarizing

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p \frac{I}{2}$$

- Pauli

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p_x - p_y - p_z)\rho + p_x X\rho X + p_y Y\rho Y + p_z Z\rho Z$$

- qudit-flip

$$\mathcal{E}(\rho) = \left(\frac{1-2p+p^d}{1-p}\right) \rho + \sum_{i=1}^{d-1} p^i X^i \rho X^{-i}$$

- Measurement

$$\mathcal{E}(\rho) = |0\rangle\langle 0| \rho |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \rho |1\rangle\langle 1|$$

$$= |0\rangle\langle 0| \langle 0|\rho|0\rangle + |1\rangle\langle 1| \langle 1|\rho|1\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(1+z) \langle 0|\rho|0\rangle + \frac{1}{2}(1-z) \langle 1|\rho|1\rangle$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2} \text{tr}(\rho) I + \frac{1}{2} \text{tr}(\rho z) z$$

- General Pauli:

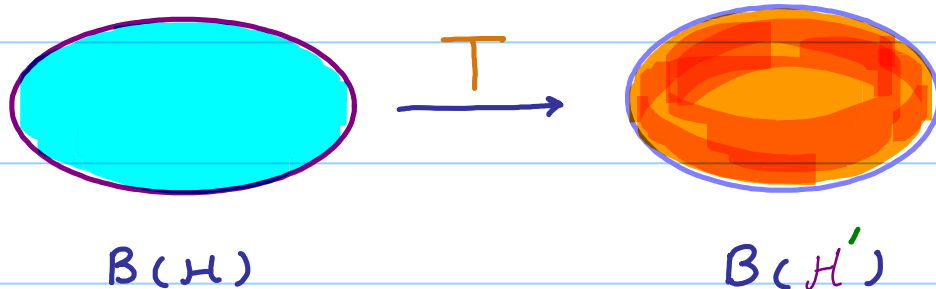
$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{i,j} p_{ij} X^i Z^j \rho (X^i Z^j)^\dagger$$

- Random Unitary

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i p_i U_i \rho U_i^\dagger \quad \sum_i p_i = 1$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \int p(\lambda) U(\lambda) \rho U(\lambda)^\dagger d\lambda$$

Choi-Jamiołchowski Isomorphism



Basis of $B(H) = \{ E_{ij} = |i\rangle\langle j| \}$

$$|\phi\rangle := \sum_{i=0}^{d-1} |i, i\rangle \in H \otimes H$$

$$\begin{aligned} |\phi\rangle\langle\phi| &= \sum_{ij} |i, i\rangle\langle j, j| \in B(H \otimes H) \\ &= \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij} \end{aligned}$$

$$R_T := (T \otimes I) |\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{ij} T(E_{ij}) \otimes E_{ij}$$

Choi-Matrix. $R_T \in B(H \otimes H)$.

①

$$R_{T+T'} = R_T + R_{T'}$$

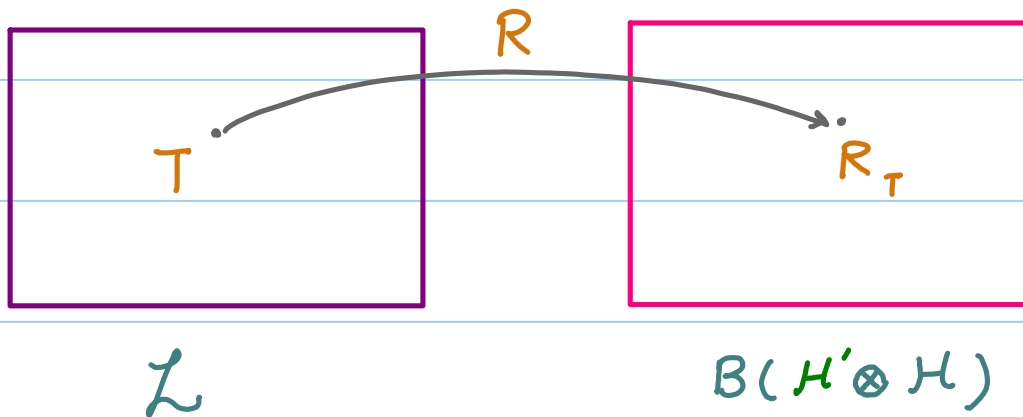
②

$$R_{\lambda T} = \lambda R_T$$

③

$$J(\varepsilon) = J(\varepsilon') \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon'$$

$T \in \mathcal{L} =$ the space of cpm's.
from $B(H) \rightarrow B(H')$.



دیکھیں کہ لائنار ٹرانسفرمیشن خاص نہیں ہوتا :

• اگر T ریڈیٹنگ ہے (TP) $\longleftrightarrow \text{Tr}_1 R_T = I_2$

• اگر T ریٹیل ہے یعنی $\varepsilon(I) = I$ $\longleftrightarrow \text{Tr}_2 R_T = I_1$

• اگر T پوزیٹو ہے $\longleftrightarrow J(\varepsilon)$ پوزیٹو ہے

چگونه متوتریک از R_T ، T را بر مبنای شرایط جزئی ρ بدست آوریم؟

$$R_T = \sum_{ij} T(E_{ij}) \otimes E_{ij}$$

$$R_T^* (I \otimes E_{lk}) = \sum_{ij} T(E_{ij}) \otimes \delta_{jk} E_{il}$$

$$\text{tr}_2 (R_T (I \otimes E_{lk})) = \sum_{ij} T(E_{ij}) \delta_{jk} \delta_{il} = \mathcal{E}(E_{lk})$$

$$T(\rho) = T(\rho_{kl} E_{kl}) = \rho_{kl} \text{tr}_2 (R_T (I \otimes E_{kl}))$$

$$T(\rho) = \text{tr}_2 (R_T (I \otimes \rho^T))$$

Examples:

- $T(\rho) = \rho \Rightarrow R_T = ?$

$$R_T = \sum_{ij} T(E_{ij}) \otimes E_{ij} = \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij} \\ = \sum_{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j| \Rightarrow$$

$$R_T = d |\phi\rangle\langle\phi|$$

- $T(\rho) = \rho^T$ $R_T = \sum_{ij} E_{ji} \otimes E_{ij} = \sum_{ij} |j\rangle\langle i| \otimes |i\rangle\langle j|$

So $\rightarrow$ $R_T =$ Permutation operator P

$$P|ij\rangle = |ji\rangle$$

P has a negative eigenvalue:

$$P(|12\rangle - |21\rangle) = |21\rangle - |12\rangle$$

$\Rightarrow$ Transposition is NOT completely positive Map!!

- $T(\rho) = p\rho + (1-p)\frac{I}{2}$

$$R_T = \sum_{ij} \left(p E_{ij} + (1-p) \frac{I}{2} \right) \otimes E_{ij} = d_p |\phi\rangle\langle\phi| + (1-p) \frac{d}{2} I \otimes |q\rangle\langle q|$$

where $|q\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |i\rangle \Rightarrow R_T \geq 0 \Rightarrow T \text{ is CP.}$

• تمرین: اگر T یک Bit-Flip باشد، R_T را به دست آورید.

• تمرین: اگر T یک phase-Flip باشد، R_T را به دست آورید.

در مورد R_T مرتبط به دست فیزیکی از حالت در Bell دیسک.

• تمرین: اگر T یک Amplitude damping باشد، به دست زیرترین R_T را به دست آورید.

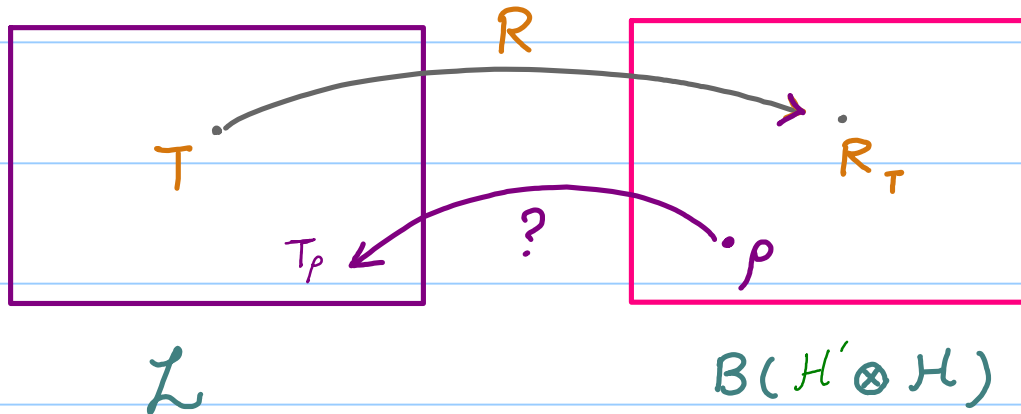
$$T(\sigma) := A_0 \sigma A_0^\dagger + A_1 \sigma A_1^\dagger$$

؛ $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}$ ، $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، برای R_T به دست آورید.

• تمرین: تمرین شبی را به هر phase damping نیز انجام دهید. به هر R_T که ممکن است که از آن به دست آید:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{bmatrix} , \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$$

$T \in \mathcal{L} =$ the space of cpm's.
from $B(H) \rightarrow B(H')$.



اے ہمارے $\rho \in B(H' \otimes H)$ کے ساتھ T_ρ متعلقہ ہے؟

$$\exists? \quad T \quad | \quad \sum_{ij} T_\rho(E_{ij}) \otimes E_{ij} = \rho \quad ?$$

$$\rightarrow \sum_{ij} T_p(E_{ij}) \otimes E_{ij} = \sum_{ij, \alpha\beta} \rho_{\alpha i, \beta j} |\alpha i \times \beta j| \quad ?$$

$$\rightarrow \sum_{ij} T_p(E_{ij}) \otimes |i \times j| = \sum_{ij, \alpha\beta} \rho_{\alpha i, \beta j} |\alpha \times \beta| \otimes |i \times j|$$

$$\rightarrow T_p(E_{ij}) = \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha i, \beta j} |\alpha \times \beta|.$$

$$\langle \alpha | T_p(E_{ij}) | \beta \rangle = \rho_{\alpha i, \beta j}$$

$$\langle \alpha | T_p(\sigma) | \beta \rangle = ?$$

$$\langle \alpha | T_p(\sigma) | \beta \rangle = \sum_{ij} \sigma_{ij} \langle \alpha | T_p(E_{ij}) | \beta \rangle$$

$$= \sum_{ij} \sigma_{ji}^T \rho_{\alpha i, \beta j}$$

$$= \sum_{ij} \langle j | \sigma^T | i \rangle \langle \alpha i | \rho | \beta j \rangle$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{ijr} \langle r_j | (1 \otimes \sigma^T) | r_i \rangle \langle \alpha | \rho | \beta_j \rangle$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{ijr} \text{Tr} \left\{ (1 \otimes \sigma^T) | r_i \rangle \langle \alpha | \rho | \beta_j \rangle \langle r_j | \right\}$$

$$= \frac{1}{d} \text{Tr} \left\{ (1 \otimes \sigma^T) (| r \rangle \langle \alpha | \otimes I) \rho (| \beta \rangle \langle r | \otimes I) \right\}$$

$$= \frac{1}{d} \text{Tr} \left\{ (| \beta \rangle \langle \alpha | \otimes \sigma^T) \rho \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\langle \alpha | T_\rho(\sigma) | \beta \rangle = \frac{1}{d} \text{Tr} \left\{ (| \beta \rangle \langle \alpha | \otimes \sigma^T) \rho \right\}$$

$\Rightarrow$

$$T_\rho(\sigma) = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta} \text{Tr} \left\{ (E_{\beta\alpha} \otimes \sigma^T) \rho \right\} E_{\alpha\beta}$$

• تمرین: اگر $\rho = I$ باشد، $T_\rho(\sigma)$ به چه صورت می آید.

• تمرین: اگر $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ باشد که دین $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$ نشان

$$T_\rho(\sigma) = \langle \chi | \sigma^T | \chi \rangle |\phi\rangle\langle\phi|$$

$$\langle \alpha | T_\rho(\sigma) | \beta \rangle = \frac{1}{d} \text{Tr} \{ (|\beta\rangle\langle\alpha| \otimes \sigma^T) \rho \}$$

• Stienspring Dilation.

• انبساط استینسپرینگ

$$\textcircled{1} \quad \rho \longrightarrow \rho' = V \rho V^\dagger \quad \text{Unitary Evolution} \quad \bullet$$

is a completely positive Map. (CPM)

$$\textcircled{2} \quad \rho \longrightarrow \rho \otimes I \quad \text{Extension or Dilation}$$

$\textcircled{3}$ if T & S are CPM's then TS is also a CPM.

• Stienspring Dilation

با بزرگ‌ترین فضای همبسته، هر نگاشته‌ای با شیبی نامرئی از $\mathbb{R}^n$ به سمت $\mathbb{R}^n$ می‌باشد:

به نظر می‌رسد $T: B(H) \rightarrow B(H')$ ، در بزرگ‌ترین فضای K ، یک عملگر

به نظر می‌رسد $V: H' \rightarrow H \otimes K$

$$T(\sigma) = V^\dagger (\sigma \otimes I) V$$

Note:

$$\sigma: H \rightarrow H$$

$$T(\sigma): H' \rightarrow H'$$

$$V: H' \rightarrow H \otimes K$$

$$\begin{array}{ccc} H' & \xrightarrow{T(\sigma)} & H' \\ \downarrow V & & \uparrow V^\dagger \\ H \otimes K & \xrightarrow{(\sigma \otimes I)} & H \otimes K \end{array}$$